8.- Temas selectos de procesos estocásticos

Definición de proceso estocástico

Una sucesión de v.a. $X_1, X_2, X_3, \ldots$ es un proceso estocástico a tiempo discreto.

- La v.a. X_1 determina el estado inicial del proceso
- Para $n = 2, 3, \ldots$ la v.a. X_n describe el estado en el que se encuentra el proceso en el tiempo n.

Si $X_1, X_2, \ldots,$ son v.a. independientes el análisis del proceso será muy sencillo. y de hecho ya tenemos algunos resultados

LDGN y TCL

Sin embargo, para muchos fenómenos aleatorios el supuesto de independencia no es válido

- El precio de una acción
- El número de contagios de una cierta enfermedad
- El estado del clima
- El numero de llamadas telefónicas a un centro de atención
- Evolución de una cierta población
- Demanda de productos → gestión de inventarios
- El numero de pasajeros del metro en una cierta línea

o estación

- Tráfico.

⇒ es necesario poder imponer una estructura de dependencia en el tiempo entre las observaciones de este tipo de fenómenos aleatorios.

Cadenas de Markov Finitas a tiempo discreto

Una cadena de Markov busca modelar la evolución de los estados que un cierto fenómeno aleatorio tome en el tiempo.

Definición (Cadena de Markov a tiempo discreto)

Consideremos el proceso aleatorio $\{X_n, n=0,1,2,\ldots\}$ cada X_n toma valores en un conjunto $V \subset \{0,1,2,3,\ldots\}$. Decimos que este proceso es una cadena de Markov si

$$P(X_{m+1}=j \mid X_m=i, X_{m-1}=i_{m-1}, \ldots, X_0=i_0)$$

$$= P(X_{m+1}=j \mid X_m=i)$$

Si además el número de estados que puede tomar la cadena es finito, i.e. $V=\{0,1,2,\ldots,N\}$

$\Rightarrow \{X_n, n=0,1,\}$ es una cadena de Markov finita

Observaciones:

- $X_n = j$ indica que en el tiempo n, la cadena se encuentra en el estado j.

- A las probabilidades

$$P(X_{m+1} = j \mid X_m = i)$$

no depende de $\underline{\underline{m}}$

se les llama probabilidades de transición y aquí asumimos que no dependen del tiempo. Cadenas de Markov homogeneas

- En particular

$$\begin{aligned} p_{ij} &= P(X_1 = j \mid X_0 = i) \\ &= P(X_2 = j \mid X_1 = i) \\ &= P(X_3 = j \mid X_2 = i) \\ &= \dots \end{aligned}$$

en otras palabras, las probabilidades de transición a un paso son las mismas

Matriz de probabilidades de transición

En general, para cadenas de Markov finitas podemos representar las probabilidades de transición a un paso para todos los estados mediante una matriz

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \cdots & N \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ \\ \\ N \end{array} & \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1N} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2N} \\ p_{31} & p_{32} & \cdots & p_{3N} \\ \vdots & & & \vdots \\ p_{N1} & p_{N2} & \cdots & p_{NN} \end{pmatrix} \end{array}$$

$\Rightarrow \quad p_{ij} \geq 0 \quad \forall \, i \, y \, j$, además

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{N} p_{ij} = \sum_{j=1}^{N} P(X_{m+1} = j \mid X_m = i) = 1}$$

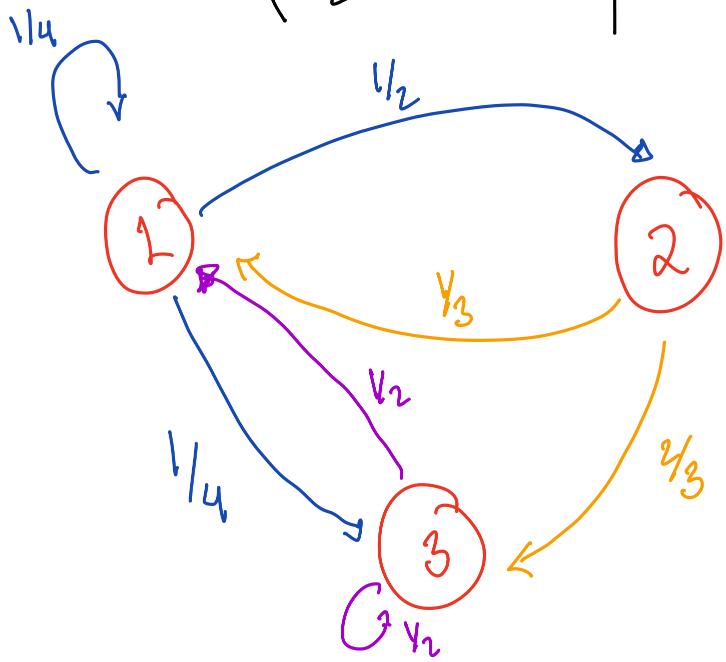
dado que la cadena está en el estado i el siguiente estado debe ser alguno de entre $\{1, 2, 3, \ldots, N\}$

En algunas ocasiones suele representarse a una Cadena de Markov con un diagrama de transición.

Ejemplo:

Supongamos que tenemos una cadena de Markov con 3 estados 1, 2 y 3 y su matriz de probabilidades de transición está dada por

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$



Vamos a practicar para aprender lo que significa P

a) $P(X_4 = 3 \mid X_3 = 2) = 2/3$

b) $P(X_3 = 1 \mid X_2 = 1) = 1/4$

c) Si suponemos que $P(X_0 = 1) = 1/3$ encuentra

$$P(X_0 = 1, X_1 = 2)$$

$$P(X_0=1, X_1=2) = P(X_1=2 \mid X_0=1)\,P(X_0=1)$$
$$= P_{12}\ 1/3$$
$$= 1/2\ 1/3 = 1/6$$

d) Si sabemos que $P(X_0=1) = 1/3$

encuentra $P(X_0=1, X_1=2, X_2=3)$

$$P(X_0=1, X_1=2, X_2=3) = P(X_2=3 \mid X_1=2, X_0=1) \times P(X_1=2, X_0=1)$$

$$= P(X_2=3 \mid X_1=2) \times P(X_1=2 \mid X_0=1)\,P(X_0=1)$$

$$= \left(2/3\right)\left(1/2\right)\left(1/3\right)$$

$$= 2/18 = 1/9$$

Ejemplo (ruina del apostador - Pascal y Fermat en 1656)

Supongamos que un apostador juega repetidamente un cierto juego de azar,

- El apostador tiene k pesos
- En cada turno puede ganar 1 peso o perder 1 peso, siempre apuesta lo mismo
- La probabilidad de ganar es p y perder $1-p$
- Piensa detenerse sólo cuando llegue a N pesos o cuando quede en bancarrota

Sea X_j el resultado de la j-ésima apuesta

$$P(X_j = 1) = p$$
$$P(X_j = -1) = 1 - p$$

$$S_i = k + \sum_{j=1}^{i} X_j$$

← La cantidad de dinero ganado o perdido que tiene el apostador después del juego i-ésimo

$$S_i \in \{0, 1, 2, \dots, N\}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Preguntas de interés

1) ¿El jugador podría jugar por siempre? – No, se puede demostrar que en algún momento se va a la bancarrota ó gana N pesos

2) ¿Cuál es la probabilidad de que

$$P(S_i = 0, \text{ para algún } i) \leftarrow \text{bancarrota}$$

$$P(S_i = N, \text{ para algún } i) \leftarrow \text{ganar}$$

3) Tiempo de paro ó

→ número promedio de juegos para ganar o quedar en bancarrota

$$\tau = \min\{i : S_i = N\}$$

$$\mathbb{E}(\tau)$$